

Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 3 de año 2010

[2'5 puntos] Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} e^x(x^2 + ax) & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{bx^2 + c}{x + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Calcula las constantes a , b y c sabiendo que f es derivable y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ tiene pendiente 3.

Solución

$$f(x) = \begin{cases} e^x(x^2 + ax) & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{bx^2 + c}{x + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Me dicen que f es derivable en \mathbb{R} y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ tiene pendiente 3.

Como me dicen que f es derivable en \mathbb{R} , y sabemos que si es derivable también es continua, por tanto f es continua y derivable en \mathbb{R} en especial en $x = 0$.

Como f es continua en $x = 0$ tenemos que:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^-} [e^x(x^2 + ax)] = e^0 \cdot (0 + 0) = 1 \cdot 0 = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(bx^2 + c)/(x + 1)] = (0 + c)/(0 + 1) = c$$

Igualando tenemos $c = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} e^x \cdot (x^2 + ax) + e^x \cdot (2x + a) & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2bx \cdot (x+1) - 1 \cdot (bx^2)}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como f es derivable en $x = 0$ tenemos que:

$$f'(0^-) = f'(0^+)$$

Vamos a utilizar la continuidad de la derivada que es más rápido

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [f'(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^-} [e^x \cdot (x^2 + ax) + e^x \cdot (2x + a)] = e^0 \cdot (0) + e^0 \cdot (0 + a) = a$$
$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [f'(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(2bx(x+1) - bx^2)/(x+1)^2] = (0(1) - 0)/(1)^2 = 0$$

Igualando tenemos $a = 0$.

Sabemos que la pendiente de la recta tangente en $x = 1$ es $f'(1)$, y me dicen que vale 3.

Como $x=1$ es mayor que 0 utilizamos la expresión $f'(x) = (2bx(x+1) - bx^2)/(x+1)^2$, por tanto tenemos que $f'(1) = 3 = (2b(1+1) - b \cdot 1)/(1+1)^2 = 3b/4$. De $3b/4 = 3$ tenemos $b = 4$.

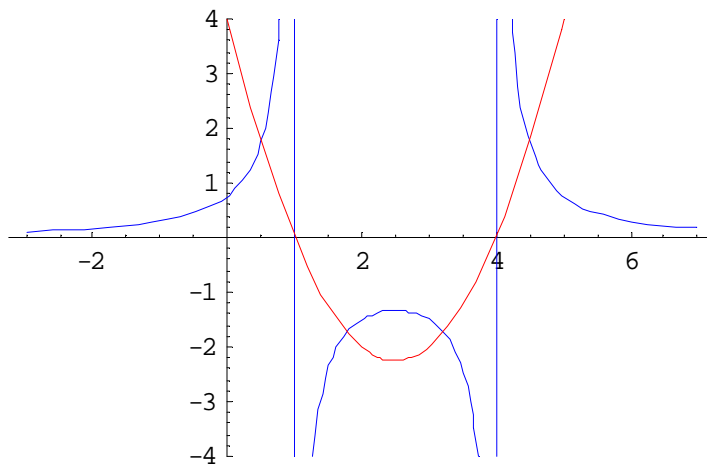
Ejercicio 2 opción A, modelo 3 de año 2010

[2'5 puntos] Dada la función f definida por $f(x) = 3/(x^2 - 5x + 4)$ para $x \neq 1$ y $x \neq 4$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas, y las rectas $x = 2$, $x = 3$.

Solución

De $f(x) = 3/(x^2 - 5x + 4)$ para $x \neq 1$ y $x \neq 4$, estamos viendo que $x = 1$ y $x = 4$, son asíntotas verticales de $f(x)$. (Si se calcula el límite cuando x tiende a 1 ó a 4 nos sale infinito). La gráfica entre las asíntotas se parece a la de una parábola con las ramas hacia abajo (gráfica de la función $1/g(x)$ a partir de la gráfica de $g(x)$ en el caso de que $g(x)$ sea una parábola), a izquierda y derecha de las asíntotas verticales $x = 1$ y $x = 4$, sabiendo que también tiene como asíntota horizontal $y = 0$, la gráfica se parece a trozos de hipérbola (me acerco a las asíntotas).

Aunque no es necesario pongo un esbozo de la gráfica de " $x^2 - 5x + 4$ " (en rojo) y de " $3/(x^2 - 5x + 4)$ " (en azul)



Como en principio no sé la gráfica pongo valores absolutos (| |)
 Área = $|\int_{-2}^3 [3/(x^2 - 5x + 4)].dx| = |\int_{-2}^3 [3/((x - 1)(x - 4))].dx| = **$

La descomposición en suma de fracciones simples es $3/((x - 1)(x - 4)) = A/(x - 1) + B/(x - 4) = [(A(x - 4) + B(x - 1))] / ((x - 1)(x - 4))$. Igualando numeradores tenemos $3 = A(x - 4) + B(x - 1)$

Tomando $x = 1$, nos sale $3 = A(-3)$, de donde $A = -1$
 Tomando $x = 4$, nos sale $3 = B(3)$, de donde $B = 1$

Seguimos ya con la integral

$$** = |\int_{-2}^3 [A/(x - 1) + B/(x - 4))].dx| = |\int_{-2}^3 [-1/(x - 1) + 1/(x - 4))].dx| =$$

$$= | [-\ln|x - 1| + \ln|x - 4|]_{-2}^3| = | ((-\ln(2) + \ln(1)) - (-\ln(1) + \ln(2))) | = | -2\ln(2) | = 2.\ln(2) \text{ u.a.}$$

Ejercicio 3 opción A, modelo 3 de año 2010

Considera las siguientes matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(a) [0'75 puntos] Calcula A^{-1} .

(b) [1'75 puntos] Resuelve la ecuación matricial $AXA^t - B = 2I$, donde I es la matriz identidad de orden 2 y A^t es la matriz traspuesta de A .

Solución

(a)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que A tenga inversa $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t)$, su determinante (| |) tiene que ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

Antes de realizar este apartado tenemos que recordar que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$, por tanto la inversa de la traspuesta es la traspuesta de la inversa.

$$(A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

De $AXA^t - B = 2I$, tenemos $AXA^t = B + 2I$. Multiplicando esta expresión por la izquierda por A^{-1} y por la derecha por $(A^t)^{-1}$ tenemos:

$A^{-1} \cdot AXA^t \cdot (A^t)^{-1} = A^{-1} \cdot (B + 2I) \cdot (A^t)^{-1}$. Por definición de matriz inversa tenemos

$$I \cdot X \cdot I = X = A^{-1} \cdot (B + 2I) \cdot (A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 opción A, modelo 3 de año 2010

Considera los puntos $A(1, 2, 1)$ y $B(-1, 0, 3)$.

- (a) [1'25 puntos] Calcula las coordenadas de los puntos que dividen el segmento AB en tres partes iguales.
 (b) [1'25 puntos] Halla la ecuación del plano perpendicular al segmento AB y que pasa por A .

Solución

(a)



$A(1, 2, 1)$ y $B(-1, 0, 3)$.

Vectorialmente vemos que $3\mathbf{AM} = \mathbf{AB}$, es decir $3(x-1, y-2, z-1) = (-2, -2, 2)$; $(3x-3, 3y-6, 3z-3) = (-2, -2, 2)$. Igualando:

$3x-3 = -2$, de donde $3x = 1$ y por tanto $x = 1/3$

$3y-6 = -2$, de donde $3y = 4$ y por tanto $y = 4/3$

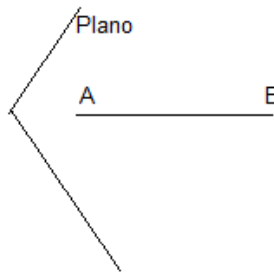
$3z-3 = 2$, de donde $3z = 5$ y por tanto $z = 5/3$

El punto M es $M(1/3, 4/3, 5/3)$

El punto N lo podemos calcular viendo que es el punto medio de los puntos M y B , es decir:

$N((1/3+(-1))/2, (4/3+0)/2, (5/3+3)/2) = N(-2/6, 4/6, 14/6)$

(b)



El plano perpendicular al segmento AB por el punto A tiene como punto el $A(1, 2, 1)$ y como vector normal el $\mathbf{n} = \mathbf{AB} = (-2, -2, 2)$

Un plano paralelo es $-2x-2y+2z + K = 0$, como pasa por A , tenemos $-2(1)-2(2)+2(1) + K = 0$, de donde $K = 4$ y el plano pedido es $-2x-2y+2z + 4 = 0$, o bien $x + y - z - 2 = 0$.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 3 de año 2010

[2'5 puntos] Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como $f(x) = (x + 1) \cdot \sqrt[3]{3 - x}$. Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -5$ y en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución

Recta tangente y recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -5$ y en $x = 2$.

Recta tangente de $f(x)$ en $x = a$ es " $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$ "

Recta normal (perpendicular) de $f(x)$ en $x = a$ es " $y - f(a) = (-1/f'(a)) \cdot (x - a)$ "

$f(x) = (x + 1) \cdot \sqrt[3]{3 - x}$, con lo cual:

$f(-5) = (-5 + 1) \cdot \sqrt[3]{3 + 5} = -4 \cdot \sqrt[3]{2^3} = (-4)(2) = -8$

$f(2) = (2 + 1) \cdot \sqrt[3]{3 - 2} = (3) \cdot \sqrt[3]{1} = (3)(1) = 3$

$f'(x) = \sqrt[3]{3 - x} - (x + 1) / [3 \cdot \sqrt[3]{(3 - x)^2}]$, con lo cual:

$f'(-5) = \sqrt[3]{3 + 5} - (-5 + 1) / [3 \cdot \sqrt[3]{(3 + 5)^2}] = \sqrt[3]{2^3} - (-4) / [3 \cdot \sqrt[3]{(2^3)^2}] = 2 + 4 / (3 \cdot 2^2) = 2 + 1/3 = 7/3$.

$f'(2) = \sqrt[3]{3 - 1} - (2 + 1) / [3 \cdot \sqrt[3]{(3 - 2)^2}] = 1 - (3) / [3 \cdot (1)^2] = 1 - 1 = 0$.

La recta tangente de $f(x)$ en $x = -5$ es " $y - f(-5) = f'(-5) \cdot (x + 5)$ ", es decir " $y - (-8) = (7/3)(x + 5)$ "

La recta normal de $f(x)$ en $x = -5$ es " $y - f(-5) = (-1/f'(-5)) \cdot (x + 5)$ ", es decir " $y - (-8) = (-3/7)(x + 5)$ "

La recta tangente de $f(x)$ en $x = 2$ es “ $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$ ”, es decir “ $y - (3) = 0 \cdot (x - 2) = 0$ ”, la recta $y = 3$. La recta normal de $f(x)$ en $x = 2$, podemos pensar que es la recta vertical $x = 2$, al ser la recta tangente la recta horizontal $y = 3$.

Ejercicio 2 opción B, modelo 3 de año 2010

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x|2 - x|$.

(a) [1 punto] Esboza su gráfica.

(b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y la recta de ecuación $x=3$.

Solución

(a)

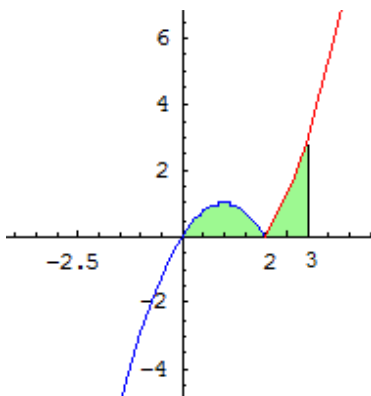
Sabemos que $|2 - x| = \begin{cases} 2-x & \text{si } x < 2 \\ x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, por tanto $f(x) = x|2 - x| = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$.

Esta función es continua en todo \mathbb{R} porque el valor absoluto es una función continua en todo \mathbb{R} , y el producto de funciones continua y compuesta de funciones continuas es continua

Si $x < 2$ tenemos la parábola $-x^2 + 2x$ que como sabemos tiene las ramas hacia abajo, corta al eje OX en $x = 0$ y $x = 2$, y el vértice en $(-b/2a, f(-b/2a)) = (1, 1)$. (Sólo la dibujamos para $x < 2$, en azul)

Si $x \geq 2$ tenemos la parábola $x^2 - 2x$ que como sabemos tiene las ramas hacia arriba, corta al eje OX en $x = 0$ y $x=2$, y el vértice en $(-b/2a, f(-b/2a)) = (1, -1)$. (Sólo la dibujamos para $x \geq 2$, en rojo)

Un esbozo de la gráfica es



(b)

El área del recinto limitado por f , el eje OX y la recta $x=3$, según vemos en la figura es

$$\text{Área} = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx = [-x^3/3 + x^2]_0^2 + [x^3/3 - x^2]_2^3 = ((-8/3 + 4) - 0) + ((9 - 9) - (8/3 - 4)) = 8/3 \text{ u.a.}$$

Ejercicio 3 opción B, modelo 3 de año 2010

[2'5 puntos] Obtén un vector no nulo $\mathbf{v} = (a, b, c)$, de manera que las matrices siguientes tengan simultáneamente rango 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{pmatrix}$$

Solución

$$\mathbf{v} = (a, b, c), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{pmatrix}$$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ el rango de A ya es 2.

En B como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ el rango de B ya es 2.

Para que $\text{rango}(A) = \text{rango}(2) = 2$, sus determinantes (| |) han de ser 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} = \{\text{Adjuntos } 2^{\text{a}} \text{ fila}\} = 1(-1)(c-a) + 0 + b(-1)(0) = a - c = 0, \text{ de donde } \mathbf{a = c}.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{vmatrix} = \{\text{Adjuntos } 1^{\text{a}} \text{ fila}\} = 2(1)(-c-b) + 0 + a(3) = 3a - 2b - 2c = 0. \text{ Como } a = c \text{ tenemos } 3c - 2b - 2c = 0, \text{ de}$$

donde $\mathbf{b = c/2}$.

El vector pedido es $\mathbf{v} = (c, c/2, c)$, con "c" cualquier n° distinto de cero porque no puede ser nulo el vector \mathbf{v} .

Ejercicio 4 opción B, modelo 3 de año 2010

Considera el plano π definido por $2x - y + nz = 0$ y la recta r dada por

$$(x - 1)/m = y/4 = (z - 1)/2$$

con $m \neq 0$.

(a) [1'25 puntos] Calcula m y n para que la recta r sea perpendicular al plano π .

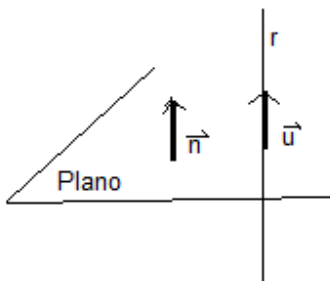
(b) [1'25 puntos] Calcula m y n para que la recta r esté contenida en el plano π .

Solución

(a)

$\pi : 2x - y + nz = 0$. Un vector normal es $\mathbf{n} = (2, -1, n)$

" r " : $(x - 1)/m = y/4 = (z - 1)/2$, con $m \neq 0$. Un punto es $A(1, 0, 1)$ y un vector director es $\mathbf{u} = (m, 4, 2)$

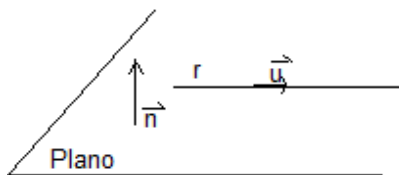


Si la recta " r " es perpendicular al plano " π " los vectores \mathbf{n} y \mathbf{u} son paralelos y por tanto sus coordenadas proporcionales, es decir $2/m = -1/4 = n/2$, de donde obtenemos dos ecuaciones:

$$2/m = -1/4, \text{ luego } \mathbf{m = -8}.$$

$$-1/4 = n/2, \text{ luego } \mathbf{n = -1/2}.$$

(b)



Si la recta " r " está contenida en el plano su punto $A(1, 0, 1)$ pertenece al plano, es decir $2(1) - 0 + n(1) = 0$, de donde $\mathbf{n = -2}$.

Como la recta está contenida en el plano es paralela a él y por tanto los vectores \mathbf{n} y \mathbf{u} son perpendiculares y su producto escalar (\cdot) es cero.

$$\mathbf{n \cdot u = 0 = (2, -1, n) \cdot (m, 4, 2) = (2, -1, -2) \cdot (m, 4, 2) = 2m - 4 - 4 = 2m - 8 = 0, \text{ de donde } \mathbf{m = 4}.$$